

7 率、比、比例及變分

重點重溫

A. 率、比及比例

1. 率

率 (rate) 是兩個不同類的量的比較，它具有單位。

例如，已知汽車在兩小時內行走了 100 km，則

$$\text{汽車的速率} = \frac{100 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 50 \text{ km/h}。$$

2. 比

比 (ratio) 是兩個或以上同類的量之間的比較，它並沒有單位。兩個量 x 及 y 的比可表示為 $x:y$ 或 $\frac{x}{y}$ 。

對於任意三個量 x ， y 及 z ，三者之比為 $x:y:z$ 。

例如，已知袋中有 6 個橙及 8 個蘋果，則

$$\text{橙及蘋果的數量之比} = 6:8 = 3:4。$$

試一試 ①

若世文在 5 分鐘內可以打 380 個字，求他的打字速率，答案以字/分鐘表示。

試一試 ②

佩雯及家樂的體重分別為 45 kg 及 57 kg。求二人的體重之比。

試一試 ③

(a) Y 與 X 成正比例。完成下表。

X	4	10
Y	6	

(b) Y 與 X 成反比例。完成下表。

X	8	20
Y	5	

NEW

3. 正比例 (direct proportion) 及反比例 (inverse proportion)

(a) 若 Y 與 X 成正比例，則 $Y = kX$ 或 $\frac{Y}{X} = k$ ，其中 k 為非零常數。

若 y_1, y_2 為任意的兩個 Y 值及 x_1, x_2 為其對應的 X 值，則 $y_1:y_2 = x_1:x_2$ 。

(b) 若 Y 與 X 成反比例，則 $XY = k$ 或 $Y = \frac{k}{X}$ ，其中 k 為非零常數。

若 y_1, y_2 為任意的兩個 Y 值及 x_1, x_2 為其對應的 X 值，則 $y_1:y_2 = x_2:x_1$ 。

即時測試 1

下列何者不等於 8:5?

A. 32 kg : 20 kg

B. 1.6 : 1

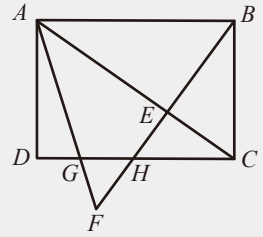
C. $\frac{160 \text{ cm}}{100 \text{ 秒}}$

D. 64 : 40

2. 圖中， $ABCD$ 為一長方形。設 E 為 AC 上的一點使得 $\angle AEB = 90^\circ$ 。延長 BE 至點 F 使得 E 為 BF 的中點。 G 及 H 分別為 CD 與 AF 及 BF 的交點。下列何者必定正確？

- I. $\triangle AEF \cong \triangle AEB$
 II. $\triangle ECH \sim \triangle EAF$
 III. $\angle CBH = \angle DAG$

- A. 只有 I 及 II
 B. 只有 I 及 III
 C. 只有 II 及 III
 D. I、II 及 III



◀ 試做第 09-21 頁第 26 題。

題型參考
HKDSE 21Q19



解：

$$FE = BE \text{ (已知)}$$

$$\angle AEF = \angle AEB = 90^\circ \text{ (已知)}$$

$$AE = AE \text{ (公共邊)}$$

$$\triangle AEF \cong \triangle AEB \text{ (SAS)}$$

I 正確。

$$\angle ECH = \angle EAB \text{ (內錯角, } AB \parallel DC)$$

$$\angle EAF = \angle EAB \text{ (全等 } \triangle \text{ 的對應角)}$$

$$\therefore \angle ECH = \angle EAF$$

$$\angle CEH = \angle AEF = 90^\circ$$

$$\angle CHE = 180^\circ - \angle ECH - \angle CEH \text{ (} \triangle \text{ 內角和)}$$

$$= 180^\circ - \angle EAF - \angle AEF$$

$$= \angle AFE \text{ (} \triangle \text{ 內角和)}$$

$$\triangle ECH \sim \triangle EAF \text{ (AAA)}$$

II 正確。

若 $\angle CBH = \angle DAG$ ，則 $\angle FBA = \angle FAB$ 。

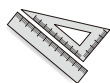
$BF = AF$ (等角對邊相等)

由於我們不知道 BF 及 AF 的實際長度，因此 $\triangle ABF$ 不一定是等腰三角形。

$\therefore \angle CBH$ 不一定等於 $\angle DAG$ 。

III 不一定正確。

答案是 A。

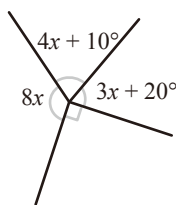


基礎練習

A. 角及直線

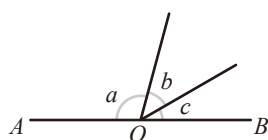
1. 圖中， $x =$

- A. 16°
- B. 32°
- C. 36°
- D. 38°



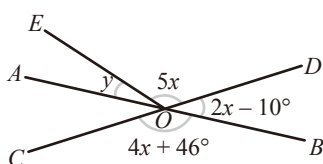
2. 圖中，若 $a:b:c=7:3:2$ 且 AOB 為直線，求 a 。

- A. 70°
- B. 84°
- C. 105°
- D. 126°



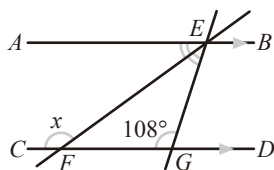
3. 圖中， AOB 及 COD 均為直線。求 x 及 y 。

- A. $x = 10^\circ, y = 30^\circ$
- B. $x = 24^\circ, y = 22^\circ$
- C. $x = 10^\circ, y = 46^\circ$
- D. $x = 16^\circ, y = 46^\circ$



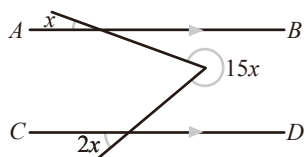
4. 圖中， $AB \parallel CD$ 且 EF 為 $\angle AEG$ 的角平分線。求 x 。

- A. 120°
- B. 132°
- C. 144°
- D. 152°



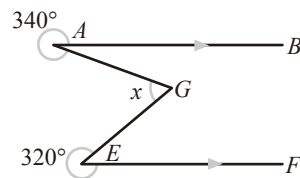
5. 圖中， $AB \parallel CD$ 。求 x 。

- A. 16°
- B. 18°
- C. 20°
- D. 22°



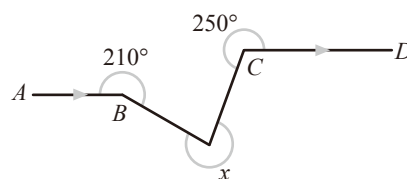
6. 圖中， $AB \parallel EF$ 。求 x 。

- A. 20°
- B. 40°
- C. 60°
- D. 80°



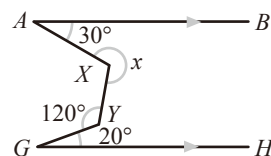
7. 圖中， $AB \parallel CD$ 。求 x 。

- A. 270°
- B. 280°
- C. 290°
- D. 300°



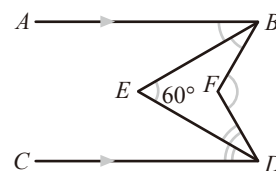
8. 圖中， $AB \parallel GH$ 。求 x 。

- A. 230°
- B. 240°
- C. 250°
- D. 260°



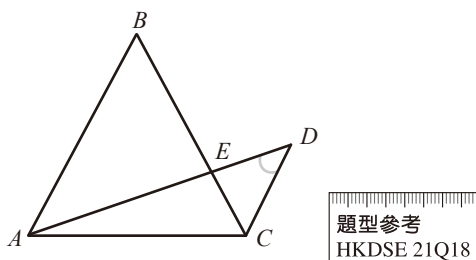
9. 圖中， $AB \parallel CD$ 。EB 及 ED 分別把 $\angle ABF$ 及 $\angle CDF$ 平分。若 $\angle BED = 60^\circ$ ，則 $\angle BFD =$

- A. 100°
- B. 110°
- C. 120°
- D. 130°



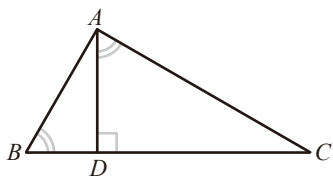
19. 圖中， ABC 為一等邊三角形及 $AB \parallel CD$ 。E 為 AD 及 BC 的交點。若 $\angle AEC = 104^\circ$ ，則 $\angle ADC =$

- A. 40°
 B. 42°
 C. 44°
 D. 46°



題型參考
HKDSE 21Q18

20. 圖中， AD 為 $\triangle ABC$ 的頂垂線及 $\angle ABC = \angle CAD$ 。下列何者必為正確？

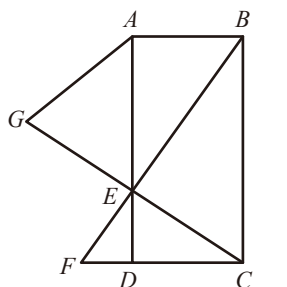


- I. $\angle BAC = 90^\circ$
 II. AD 為 $\angle BAC$ 的角平分線。
 III. $\triangle ABC \sim \triangle DAC$

- A. 只有 I
 B. 只有 II
 C. 只有 I 及 III
 D. 只有 II 及 III

21. 圖中， $ABCD$ 為長方形，E 為 AD 上的一點使得 BE 垂直於 CE 。BE 的延線與 CD 的延線相交於 F 。延長 CE 至點 G 使得 $AE = EG$ 。下列何者必定正確？

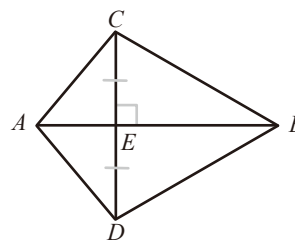
- A. $AG \parallel BE$
 B. $\angle AEG = \angle CBE$
 C. $\triangle ABE \sim \triangle DEC$
 D. $\triangle BCE \sim \triangle AEG$



題型參考
HKDSE 23Q21

22. 圖中， BEA 為 CD 的垂直平分線。下列何者為正確？

NEW



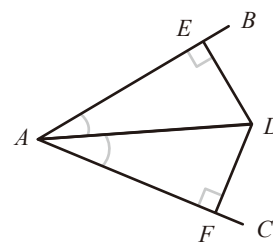
- I. $BC = BD$
 II. $\angle ACE = \angle ADE$
 III. BE 為 $\angle CBD$ 的角平分線。

- A. 只有 II
 B. 只有 I 及 II
 C. 只有 II 及 III
 D. I、II 及 III

23. 圖中， AD 為 $\angle BAC$ 的角平分線。E 及 F 分別為 AB 及 AC 上的點使得 $DE \perp AB$ 及 $DF \perp AC$ 。若 $AE = 36$ cm 及 $AD = 39$ cm，求 $AEDF$ 的周界。

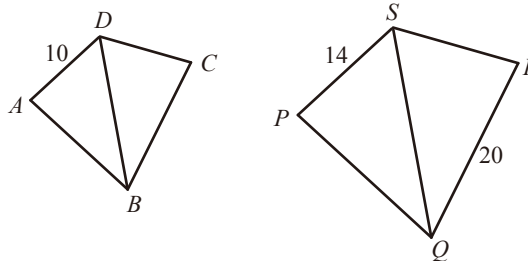
NEW

- A. 30 cm
 B. 51 cm
 C. 102 cm
 D. 540 cm



24. 圖中， $ABCD \sim PQRS$ 。下列何者不正確？

NEW



- A. $\triangle CDB \sim \triangle RSQ$
 B. $\angle ADB = \angle PSQ$
 C. $BC = 7$
 D. $\frac{SQ}{DB} = \frac{7}{5}$



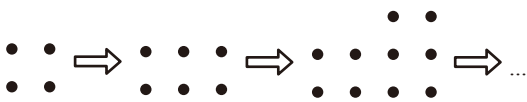
綜合測驗

初階

- 已知數列的通項 $T(n)$ 為 $an + bn^2$ ，其中 a 及 b 為常數。若 $T(3) = 3$ 及 $T(4) = 12$ ，求 $T(10)$ 。
 A. 65
 B. 80
 C. 110
 D. 150
- 已知數列的首項及第二項分別為 4 及 6。對任意大於 2 的正整數 n ，數列的第 $(n+1)$ 項為第 $(n-1)$ 項及第 n 項之和。求該數列的第八項。
 A. 42
 B. 68
 C. 110
 D. 178
- 設 a_n 為某數列的第 n 項。若 $a_2 = 4$ ， $a_5 = 24$ 及對任意正整數 n ， $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ ，則 $a_1 =$
 A. 5。
 B. $\frac{24}{5}$ 。
 C. $-\frac{24}{5}$ 。
 D. -5。

題型參考
HKDSE 18Q12

- 圖中，第 1 個圖案包含 4 點。對任意正整數 n ，第 $(n+1)$ 個圖案是由第 n 個圖案加上 $2n$ 點所組成。求第 8 個圖案的點的數目。

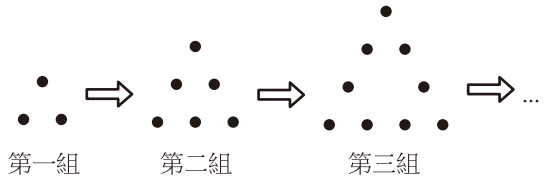


- 46
- 60
- 66
- 76

題型參考
HKDSE 22Q14

題型參考
HKDSE 19Q14

- 圖中所示為各組按次序排列的彈珠。若第一組有 3 粒彈珠，求第 10 組的彈珠數目。



- 15
- 18
- 21
- 30

- 求等差數列 2020，2011，2002，... 的最後一個正數項。
 A. 2
 B. 4
 C. 6
 D. 8

- 求 3000 至 6000 內（包括 3000 及 6000）所有可被 6 整除但不可被 8 整除的整數的數目。
 A. 374
 B. 375
 C. 437
 D. 438

- 若等差數列的第二項及第六項分別為 $2x + 5$ 及 $10x + 1$ ，則第 25 項為
 A. $11x - 4$ 。
 B. $28x + 17$ 。
 C. $5(7x + 2)$ 。
 D. $6(8x - 3)$ 。

1 百分數

即時測試

1. D

$$\begin{aligned} \text{百分增減} &= \frac{\$(12\,000 - 10\,000)}{\$10\,000} \times 100\% \\ &= 20\% \end{aligned}$$

2. A

$$\begin{aligned} \text{售價} &= \$200 \times (1 - 10\%) \\ &= \$180 \end{aligned}$$

3. D

$$\begin{aligned} \text{本利和} &= \$500 \times (1 + 4\%)^2 \\ &= \$540.8 \\ \text{複利息} &= \$540.8 - \$500 \\ &= \$40.8 \end{aligned}$$

4. A

$$\begin{aligned} \text{價值} &= \$2\,000\,000 \times (1 + 3\%)^4 \\ &= \$2\,250\,000 \quad (\text{準確至三位有效數字}) \end{aligned}$$

5. D

$$\begin{aligned} \text{應課稅入息實額} &= \$[12(15\,000) - 132\,000] \\ &= \$48\,000 \\ \text{薪俸稅} &= \$48\,000 \times 2\% \\ &= \$960 \end{aligned}$$

基礎練習

1. A

$$\begin{aligned} \text{餘下的蛋糕數目} &= 60(1 - 60\%)(1 - 75\%) \\ &= 6 \end{aligned}$$

2. C

$$\begin{aligned} &\text{袋子 B 的筆的數目} \\ &= 400 \times (1 + 25\%) \\ &= 500 \\ &\text{設 } x \text{ 為袋子 C 的筆的數目。} \\ &x \times (1 + 150\%) = 500 \\ &x = 500 \div 2.5 \\ &= 200 \\ &\text{袋子 C 的筆的數目為 } 200。 \end{aligned}$$

3. D

$$\begin{aligned} &\text{通過所有測試的應徵者的百分數} \\ &= 70\% \times 80\% \\ &= 56\% \end{aligned}$$

4. B

$$\begin{aligned} \text{百分增加} &= \frac{(300 - 250) \text{ cm}^3}{250 \text{ cm}^3} \times 100\% \\ &= 20\% \end{aligned}$$

5. C

$$\begin{aligned} \text{原本每小時生產的玩具數目} &= 225 \div 3 = 75 \\ \text{現在每小時生產的玩具數目} &= 180 \div 2 = 90 \\ \text{百分增加} \\ &= \frac{90 - 75}{75} \times 100\% \\ &= 20\% \end{aligned}$$

6. A

7. B

$$\begin{aligned} &\text{設產品 B 的銷售額為 } \$x。 \text{則產品 A 的銷售額為} \\ &\$(1 + 50\%)x = \$(1.5x)。 \\ &x + 1.5x = 50\,000 \\ &x = 20\,000 \end{aligned}$$

產品 B 的銷售額為 \$20 000。

8. A

$$\begin{aligned} &\text{設 } l \text{ 及 } w \text{ 分別為長方形原來的長及闊。} \\ &\text{原來的面積} = lw \\ &\text{新的面積} = (1 + 10\%)l \times (1 - 15\%)w \\ &= 0.935lw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{百分增減} &= \frac{0.935lw - lw}{lw} \times 100\% \\ &= -6.5\% \end{aligned}$$

🔍 解題分析

嘗試以原值表示新值，然後利用公式求百分增減。

9. C

$$\begin{aligned} \text{新的半徑} &= 12 \times (1 + 25\%) \text{ cm} \\ &= 15 \text{ cm} \\ \text{新的面積} &= \pi \times (15)^2 \text{ cm}^2 \\ &= 225\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

10. C

$$\begin{aligned} &\text{百分增減} \\ &= \frac{k[(1 + 5\%)x]^2 - kx^2}{kx^2} \times 100\% \\ &= \frac{[(1.05)^2 - 1]kx^2}{kx^2} \times 100\% \\ &= 10.25\% \end{aligned}$$

🔍 解題分析

利用公式，我們可以 x 表示 y 的新值。

11. C

$$\begin{aligned}
 & \text{去年的人口} \\
 &= 420\,000 + 480\,000 \\
 &= 900\,000 \\
 & \text{本年的人口} \\
 &= 420\,000(1 + 4\%) + 480\,000(1 - 2\%) \\
 &= 907\,200 \\
 & \text{百分增減} = \frac{907\,200 - 900\,000}{900\,000} \times 100\% \\
 &= 0.8\%
 \end{aligned}$$

12. D

設汽車的原來速率為 v km/h，且行走距離為 d km。

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{ 原本所需時間} = \frac{d}{v} \text{ 小時} \\
 & \text{速率的新值} = (1 + 20\%)v \text{ km/h} \\
 & \text{新所需時間} = \frac{d}{(1 + 20\%)v} \text{ 小時} \\
 & \text{百分增減} = \frac{\left[\frac{d}{(1 + 20\%)v} - \frac{d}{v} \right] \text{ 小時}}{\frac{d}{v} \text{ 小時}} \times 100\% \\
 &= -16\frac{2}{3}\%
 \end{aligned}$$

🔍 解題分析

利用公式「時間 = 距離 ÷ 速率」，以速率和距離來表示時間。

13. A

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{ 設 } n \text{ 為該數的原值。} \\
 & \text{百分增減} \\
 &= \frac{(1 + 30\%)(1 - 20\%)n - n}{n} \times 100\% \\
 &= \frac{(1.04 - 1)n}{n} \times 100\% \\
 &= 4\%
 \end{aligned}$$

🎯 MC 搶分攻略

技巧－考慮特例

考生可假設該數為 100，然後求新值。

14. B

$$\begin{aligned}
 & \text{設 } x \text{ 為他原有的遊戲卡的數目。} \\
 & 45\%x + 140 = x(1 - 5\%) \\
 & 0.95x - 0.45x = 140 \\
 & \quad \quad \quad x = 280 \\
 & \therefore \text{ 他原有的遊戲卡數目為 } 280。
 \end{aligned}$$

15. A

$$\begin{aligned}
 \text{售價} &= \$2\,000\,000(1 + 10\%) \\
 &= \$2\,200\,000
 \end{aligned}$$

16. D

$$\begin{aligned}
 \text{盈利百分率} &= \frac{\$(1404 - 1200)}{\$1200} \times 100\% \\
 &= 17\%
 \end{aligned}$$

17. C

設 x 為電腦的成本。

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow x(1 + 20\%) = 6000 \\
 & \quad \quad \quad 1.2x = 6000 \\
 & \quad \quad \quad x = 5000 \\
 & \therefore \text{ 成本為 } \$5000。 \\
 & \text{虧蝕百分率} \\
 &= \frac{\$(5000 - 4250)}{\$5000} \times 100\% \\
 &= 15\%
 \end{aligned}$$

💡 常犯錯誤

留意考生經常會把

售價 = 成本 × (1 + 盈利百分率) 誤認為
成本 = 售價 × (1 + 盈利百分率)。

18. D

$$\begin{aligned}
 & \text{設 } \$n \text{ 為該機器的成本。} \\
 & n \times 45\% = 810 \\
 & \quad \quad \quad n = 1800 \\
 & \therefore \text{ 該機器的成本為 } \$1800。
 \end{aligned}$$

19. B

$$\begin{aligned}
 & \text{折扣百分率} \\
 &= \frac{\$(200 - 150)}{\$200} \times 100\% \\
 &= 25\%
 \end{aligned}$$

20. B

$$\begin{aligned}
 & \text{設 } \$x \text{ 為標價。} \\
 & x(90\%) = 180 \\
 & \quad \quad \quad x = 200 \\
 & \therefore \text{ 標價為 } \$200。
 \end{aligned}$$